Kombinatorik

	Mit Wiederholung	**Ohne Wiederholung**
Variation (Auswahl *mit* Reihenfolge)	$\overline{V_n^k} = n^k$	$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k!$
Kombination (Auswahl *ohne* Reihenfolge)	$\overline{K_n^k} = \binom{n+k-1}{k}$	$K_n^k = \binom{n}{k}$
Permutation (Anordnung)	$P_n^{n_1,\dots,n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$	$P_n = n!$

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Whk. $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\#\text{Günstige Ereignisse}}{\#\text{Alle Ereignisse}}$

Voraussetzung: Endlich viele Ereignisse, alle mit der selben Whk.

Siebformel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Whk. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$

Totale Wahrscheinlichkeit $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$

Satz von Bayes $P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(B_i|A) \cdot P(A)$

Voraussetzung: $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, \quad B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

Unabhängigkeit (Ereignisse) A, B unabhängig $\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zufallsverteilungen

	Diskret (zählbar)	**Stetig** (überabzählbar)
Verteilungsfunktion	$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (1) $\mathbb{P}(X \leq b) = F_X(b)$ (2) $\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$ (3) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
Whk.- & Dichtefunktion	$p_i := \mathbb{P}(X = x_i) \in [0,1]$ $\sum_{i \in I} p_i = 1$	$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) \geq 0$ $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
Erwartungswert	$\mathbb{E}(X) := \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i,$ falls $\mathbb{E}(\lvert X \rvert) = \sum_{i \in I} \lvert x_i \rvert \cdot p_i < \infty$	$\mathbb{E}(X) := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x,$ falls $\mathbb{E}(\lvert X \rvert) = \int_{\mathbb{R}} \lvert x \rvert \cdot f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$
Varianz	$\operatorname{Var}(X) := \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) \overset{\circledast}{=} \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ $\circledast$ falls $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 \cdot p_i < \infty$	$\operatorname{Var}(X) := \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big) \overset{\circledast}{=} \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ $\circledast$ falls $\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$

Rechenregeln für Erwartungswert & Varianz

	Erwartungswert	**Varianz**
Addititivät	$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$	$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X, Y)$
Skalare Multiplikation	$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$	$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var}(X)$
Konstante	$\mathbb{E}(a) = a$	$\operatorname{Var}(a) = 0$

Beispiel

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ und $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2$.

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \implies \mathbb{E}(S_n) = n\mu, \quad \operatorname{Var}(S_n) = n\sigma^2$$

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \implies \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu, \quad \operatorname{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Verteilungsmodelle

Gleichverteilung
$X \sim \mathrm{U}\{x_1, \dots, x_n\}$

Jedes Ereignis $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist gleich wahrscheinlich.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \left(\text{für } x_k = k: \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12} \right)$$

Binomial-verteilung
$X \sim \mathrm{B}(n, p)$

$X = \{$Anzahl Erfolge bei n Versuchen (**mit** Wiederholung)$\}$

- **Mit** Wiederholung = Jeder Erfolg hat die selbe Whk. p
- Feste Anzahl an Versuchen

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \mathbb{E}(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Hyper-geometrische Verteilung
$X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$

$X = \{$Anzahl Erfolge bei n Versuchen (**ohne** Wiederholung)$\}$

- **Ohne** Wiederholung
- Feste Anzahl an Versuchen

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \mathbb{E}(X) = n\frac{M}{N}, \quad \mathrm{Var}(X) = n\frac{M(N-M)}{N^2}\frac{N-n}{N-1}$$

Poisson-verteilung
$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

$X = \{$Anzahl Erfolge (innerhalb einer Zeit)$\}$

- „Verteilung der seltenen Ereignisse“
- Beliebig viele Erfolge möglich (innerhalb einer Zeit)

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Geometrische Verteilung
$X \sim \mathrm{G}(p)$

$X = \{$Anzahl Versuche **bis** (einschließlich) zum ersten Erfolg$\}$

- Beim Eintreffen des ersten Erfolges wird das Experiment beendet
- Jeder Erfolg hat die selbe Wahrscheinlichkeit p
- Gedächtnislosigkeit: $\mathbb{P}(X \leq k + n \,|\, X > n) = \mathbb{P}(X \leq k)$

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$