



Kombinatorik

	Mit Wiederholung	Ohne Wiederholung
Variation (Auswahl <i>mit</i> Reihenfolge)	$\overline{V}_n^k = n^k$	$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k!$
Kombination (Auswahl <i>ohne</i> Reihenfolge)	$\overline{K}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$	$K_n^k = \binom{n}{k}$
Permutation (Anordnung)	$P_n^{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$	$P_n = n!$

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Whk.	$P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{\# \text{Günstige Ereignisse}}{\# \text{Alle Ereignisse}}$ Voraussetzung: Endlich viele Ereignisse, alle mit der selben Whk.
Siebformel	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Bedingte Whk.	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$
Totale Wahrscheinlichkeit	$P(A) = P(A B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A B_n) \cdot P(B_n)$
Satz von Bayes	$P(A B_i) \cdot P(B_i) = P(B_i A) \cdot P(A)$ Voraussetzung: $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
Unabhängigkeit (Ereignisse)	$A, B \text{ unabhängig} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



Zufallsverteilungen

	Diskret (zählbar)	Stetig (überabzählbar)
Verteilungs- funktion	$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ $(1) \mathbb{P}(X \leq b) = F_X(b)$ $(2) \mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$ $(3) \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
Whk.- & Dichtefunktion	$p_i := \mathbb{P}(X = x_i) \in [0, 1]$ $\sum_{i \in I} p_i = 1$	$f(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \geq 0$ $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$
Erwartungs- wert	$\mathbb{E}(X) := \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i,$ falls $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i < \infty$	$\mathbb{E}(X) := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx,$ falls $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx < \infty$
Varianz	$\text{Var}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$ $\stackrel{\otimes}{=} \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ $\otimes \text{ falls } \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 \cdot p_i < \infty$	$\text{Var}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$ $\stackrel{\otimes}{=} \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ $\otimes \text{ falls } \mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x) dx < \infty$

Rechenregeln für Erwartungswert & Varianz

	Erwartungswert	Varianz
Additivität	$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)$
Skalare Multiplikation	$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$
Konstante	$\mathbb{E}(a) = a$	$\text{Var}(a) = 0$

Beispiel

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i \quad \implies \quad \mathbb{E}(S_n) = n\mu, \quad \text{Var}(S_n) = n\sigma^2$$

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \implies \quad \mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu, \quad \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$



Verteilungsmodelle

Gleichverteilung Jedes Ereignis $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist gleich wahrscheinlich.

$$X \sim U\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \left(\text{für } x_k = k : \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12} \right)$$

**Binomial-
verteilung**

$$X \sim B(n, p)$$

$X = \{\text{Anzahl } \text{Erfolge} \text{ bei } n \text{ Versuchen (mit Wiederholung)}\}$

- Mit Wiederholung = Jeder **Erfolg** hat die selbe Whk. p
- Feste Anzahl an **Versuchen**

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

**Hyper-
geometrische
Verteilung**

$$X \sim \text{Hyp}(N, M, n)$$

$X = \{\text{Anzahl } \text{Erfolge} \text{ bei } n \text{ Versuchen (ohne Wiederholung)}\}$

- Ohne Wiederholung
- Feste Anzahl an **Versuchen**

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \mathbb{E}(X) = n \frac{M}{N}, \quad \text{Var}(X) = n \frac{M(N-M)}{N^2} \frac{N-n}{N-1}$$

**Poisson-
verteilung**

$$X \sim \text{Poi}(\lambda)$$

$X = \{\text{Anzahl } \text{Erfolge} \text{ (innerhalb einer Zeit)}\}$

- „Verteilung der seltenen Ereignisse“
- Beliebige viele **Erfolge** möglich (innerhalb einer Zeit)

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

**Geometrische
Verteilung**

$$X \sim G(p)$$

$X = \{\text{Anzahl } \text{Versuche bis (einschließlich) zum ersten Erfolg}\}$

- Beim Eintreffen des ersten Erfolges wird das Experiment beendet
- Jeder **Erfolg** hat die selbe Wahrscheinlichkeit p
- Gedächtnislosigkeit: $\mathbb{P}(X \leq k+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X \leq k)$

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$



Gleichverteilung Alle Teilintervalle von $[a, b]$ gleicher Länge sind gleich wahrscheinlich.

$X \sim U[a, b]$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Exponential-
verteilung**

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$X = \{\text{Dauer von Zeitintervallen}\}$, z.B. Wartezeit, Lebensdauer, ...

- Gedächtnislosigkeit: $P(X \leq x+t | X > t) = P(X \leq x)$
- $X = \{\text{Wartezeit zw. 2 Erfolge}\}$, $Y = \{\text{Anzahl Erfolge (innerhalb 1 Zeit-EH)}\}$
 $X \sim \text{Exp}(\lambda) \iff Y \sim \text{Poi}(\lambda)$

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Normal-
verteilung**

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$X = \{\text{Messfehler/Abweichungen/...}\}$

- Verteilung symmetrisch um den Maximalwert der Dichte $x_{\max} = \mu$
- Wendepunkte der Dichte bei $x_w = \mu \pm \sigma$
- Standardisieren: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad \mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$