Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Grundgesamtheit   Whk. für das Eintreten von ω.

Def.: $\Omega \neq \emptyset$ abzählbar. $P: \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω.

Wahrscheinlichkeitsmaß (Kolmogorow)

Def.: $\Omega \neq \emptyset$ abzählbar. $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ mit

$\mathcal{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (Normiertheit)

(ii) $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \wedge A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

(σ-Additivität)

heißt (diskretes) Wahrscheinlichkeitsmaß.

zählbar

Anmerkung:

- Gegebene Whk.-Funktion P definiert mit $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ ein Whk.-Maß
- Gegebenes Whk.-Maß $\mathbb{P}$ definiert mit $P(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$ eine Whk.-Funktion

Laplace-Wahrscheinlichkeit

- Grundmenge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ist endlich
- $P(\omega_1) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: $\quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#\text{ günstige Ereignisse}}{\#\text{ Gesamtzahl Ereignisse}}$

Bsp: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem (idealen) 6-seitigen Würfel eine Primzahl zu würfeln?

$$\mathbb{P}(\{\text{Primzahl}\}) = \mathbb{P}(\{2,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\hat{=}\ 50\%)$$

Aufgabe: Beim Kartenspiel Skat gibt es insgesamt 32 einzigartige Karten mit 8 Werten (7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass) und 4 Farben (♣, ♠, ♥, ♦), von denen jeweils 10 Karten an die drei Spieler ausgeteilt werden und 2 Karten verdeckt in den *Skat* gelegt werden. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

(a) im *Skat* zwei Asse liegen? $= A$

(b) Spieler 1 genau ein Ass erhält? $= B$

(c) im *Skat* zwei Asse liegen und Spieler 1 genau ein Ass erhält? $= C$

von 4 Assen 2 auswählen

(a) $P(A) = \dfrac{\#\text{ 2 von 4 Asse}}{\#\text{ Alle Möglichkeiten für 2 Karten}} = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} \approx \underline{\underline{0{,}0121}}$

von 32 Karten 2 auswählen

$$= \frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{32\cdot 31}{2\cdot 1}} = \underline{\underline{\frac{3}{248}}}$$

von 4 Assen 1 auswählen

von 28 Nicht-Assen 9 auswählen

(b) $P(B) = \dfrac{\#\text{ Hände mit 1 Ass}}{\#\text{ Mögliche Hände}} = \dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{385}{899} \approx \underline{\underline{0{,}0428}}$

von 32 Karten 10 auswählen

von 28 Nicht-Assen 9 auf die Hand

von 4 Assen 1 auf die Hand

← von den (übrigen) 3 Assen 2 in den Skat

(c) $P(C) = P(A \cap B) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{32}{10}\cdot\binom{22}{2}} = \underline{\underline{\dfrac{5}{899}}}$

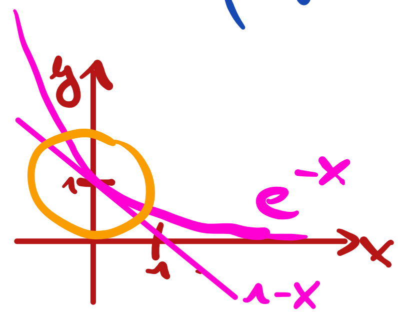
von 32 Karten 10 auf die Hand

von den verbleibenden 22 Karten 2 in den Skat

Aufgabe (Geburtstagsparadoxon): Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter k Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? $= A$

Anmerkung: Gehen Sie von 365 Tagen aus. Verwenden Sie die Näherung $1 - x \overset{\leq}{\approx} e^{-x}$ für „kleine x".

$$P(A) = 1 - P(\text{„alle an unterschiedlichen Tagen"}) = \ldots \left(= 1 - \frac{V_{365}^{k}}{\overline{V}_{365}^{k}} \right)$$



$$k=1: \quad \ldots = 1 - \frac{365}{365} = 0$$

$$k=2: \quad \ldots = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = \ldots$$

$$\vdots$$

$$k: \quad \ldots = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{365-(k-1)}{365} = 1 - \prod_{j=0}^{k-1} \frac{365-j}{365} = 1 - \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \overset{=x}{\boxed{\frac{j}{365}}}\right)$$

$$\geq 1 - \prod_{j=0}^{k-1} e^{-\frac{j}{365}} = 1 - e^{\sum_{j=0}^{k-1} -\frac{j}{365}} = 1 - e^{-\frac{1}{365} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} j}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{365} \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2}} = 1 - e^{-\frac{1}{730} \cdot k \cdot (k-1)} \geq P$$

damit sich eine Wette lohnt

$$\underline{k = 18:} \quad P(A) \overset{\geq}{\approx} \underline{0{,}3424}$$

$$1-e^{-\frac{1}{730}\cdot k(k-1)} \geq p \qquad \Big| +e^{\cdots} \quad \Big| -p$$

$$1-p \geq e^{-\frac{1}{730}\cdot k(k-1)} \qquad \Big| \ln(\ldots)$$

$$\ln(1-p) \geq -\frac{1}{730}\cdot k(k-1) \qquad \Big| \cdot(-730)$$

$$-730\cdot\ln(1-p) \leq k^2-k = \left(k-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4} \qquad \Big| +\tfrac{1}{4}$$

$$\tfrac{1}{4}-730\cdot\ln(1-p) \leq \left(k-\tfrac{1}{2}\right)^2 \qquad \Big| \sqrt{\ldots} \quad \Big| +\tfrac{1}{2}$$

$$k \geq \tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-730\cdot\ln(1-p)}$$ (neg. Wurzel entfällt, weil $k \geq 0$)

$p = 95\%$: $k \geq 48$

$p = 50\%$: $k \geq 23$

$p = 25\%$: $k \geq 16$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

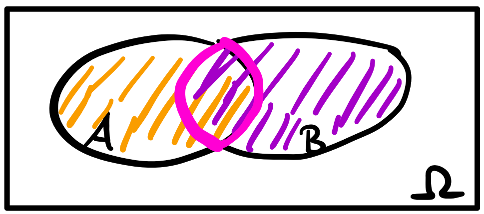
Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

unmögliches Ereignis

(1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$

(2) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(3) $\mathbb{P}(A \cup B) = \underline{\mathbb{P}(A)} + \underline{\mathbb{P}(B)} - \underline{\mathbb{P}(A \cap B)}$ (Siebformel)



(4) $\mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$ (Regel von de Morgan)

$\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$

Aufgabe: Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A \cap B)$, wenn $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$, $\mathbb{P}(A \backslash B) = 0,4$ und $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,1$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{B})$ und $\mathbb{P}(A \cup B)$, falls $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,2$ und $\mathbb{P}(A \backslash B) = 0,3$.

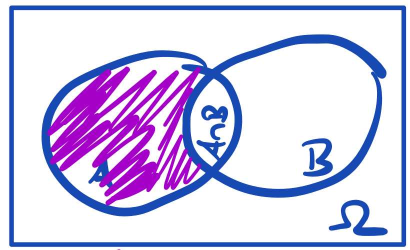
$\rightarrow A \cap B = \emptyset \iff \mathbb{P}(A \cap B) = 0$

(c) A und B seien disjunkte Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0,3$ und $\mathbb{P}(B) = 0,4$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(\overline{A \cup B})$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B})$ und $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

(a) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,7 \quad (\mathrm{I})$

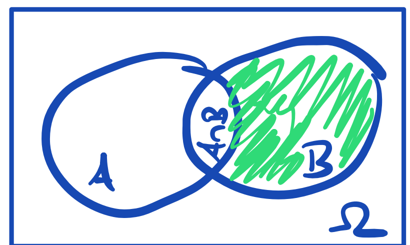
$\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,4 \quad (\mathrm{II})$

$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,1 \quad (\mathrm{III})$



$\mathbb{P}(A \backslash B)$

$(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}): \ \mathbb{P}(B) = \underline{\underline{0,3}}$



$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B \backslash A)$

$(\mathrm{I}) - (\mathrm{III}): \ \mathbb{P}(A) = \underline{\underline{0,6}}$

$\mathbb{P}(A) = 0,6$ in (II): $0,6 - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,4 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \underline{\underline{0,2}}$

(b) (I) $0{,}2 = \mathbb{P}(A \cap B)$

(II) $0{,}2 = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(III) $0{,}3 = \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(I) in (II): $0{,}2 = \mathbb{P}(B) - 0{,}2 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 0{,}4 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{B}) = \underline{\underline{0{,}6}}$

(I) in (III): $0{,}3 = \mathbb{P}(A) - 0{,}2 \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{P}(A) = 0{,}5}}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}9}}$$

(c) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$$\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - (0{,}3 + 0{,}4 - 0) = \underline{\underline{0{,}3}}$$

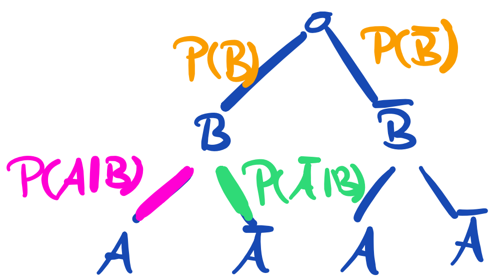
$$\mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = \underline{\underline{1}}$$

Regel von de Morgan

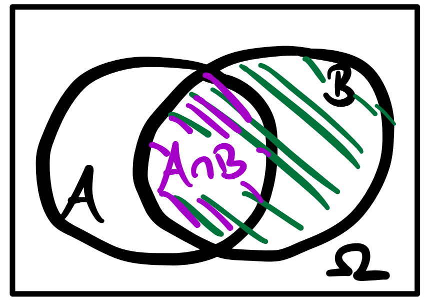
$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}4 - 0 = \underline{\underline{0{,}4}}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist definiert durch



$$\boxed{\mathbb{P}(A\,|\,B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$



$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)$$
$$= \mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)$$

Aufgabe: Ein Automobilhersteller möchte ein neues Automobil auf den Markt bringen und schätzt den Markterfolg auf 54% ein. Er möchte das Modell daher zunächst auf einem Testmarkt einführen, da er weiß, dass später erfolgreiche Automodelle zu 73% auf dem Testmarkt Erfolg hatten. Allerdings waren auch 35% der Flops zuvor im Testmarkt erfolgreich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das neue Automodell im Testmarkt Erfolg und auf dem eigentlichen Markt kein Erfolg hat?

$A = \{\text{Erfolg auf Testmarkt}\}$

$B = \{\text{Erfolg auf realem Markt}\}$

$\mathbb{P}(B) = 0{,}54 \iff \mathbb{P}(\overline{B}) = 0{,}46$

$\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}73$

$\mathbb{P}(A \mid \overline{B}) = 0{,}35$

ges.: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) = 0{,}35 \cdot 0{,}46 = \underline{0{,}161}$

Def. Bedingte Wkt.

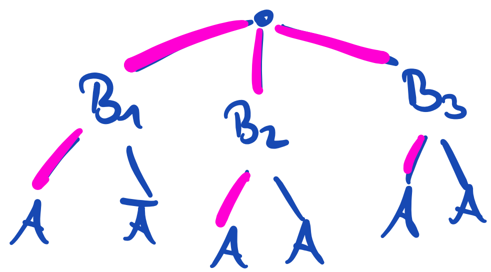
$$\mathbb{P}(A \mid \overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})} \quad \Big| \cdot \mathbb{P}(\overline{B})$$

$$\iff \mathbb{P}(A \mid \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $A \subseteq \Omega$ und die Folge (B_i) eine Zerlegung von Ω, d.h. $\Omega = \bigcup_{i \in J} B_i$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\mathbb{P}(B_i) > 0$. Dann gilt:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

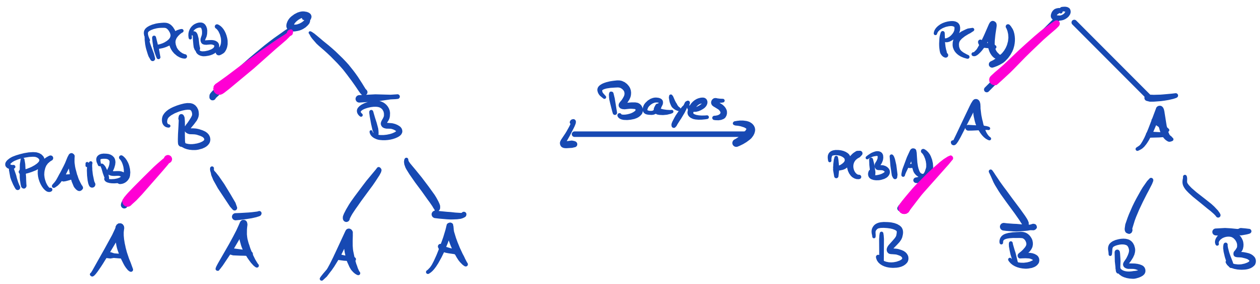


Satz von Bayes

($\widehat{=}$ Ereignisreihenfolge umdrehen)

Seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$. Es gilt:

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \boxed{\mathbb{P}(A\mid B)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\mid A)\cdot\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A\cap B)$$



Beweis:

$$\mathbb{P}(A\mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\mid B)\cdot\mathbb{P}(B)$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}(B\mid A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B\mid A)\cdot\mathbb{P}(A)$$

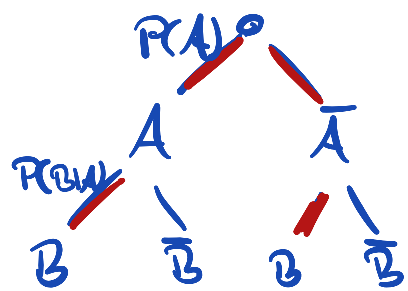
Aufgabe: Bewerber an einer Hochschule müssen eine Aufnahmeprüfung absolvieren, um aufgenommen zu werden. Es ist bekannt, dass von den fähigen Bewerbern 80% die Prüfung bestehen von den unfähigen 25%. Es bewerben sich 40% fähige Kandidaten.

(a) Wieviele Prozent aller Bewerber werden aufgenommen?

(b) Wie groß ist der Anteil der fähigen Studenten unter den Aufgenommenen?

$A = \{\text{Bewerber ist fähig}\}$

$B = \{\text{Bewerber besteht Prüfung}\}$



$\mathbb{P}(B|A) = 0{,}8$

$\mathbb{P}(B|\bar{A}) = 0{,}25$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}4$

(a) $\mathbb{P}(B) = \underbrace{\mathbb{P}(B|A)}_{0{,}8} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{0{,}4} + \underbrace{\mathbb{P}(B|\bar{A})}_{0{,}25} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\bar{A})}_{1-0{,}4} = 0{,}32 + 0{,}15 = \boxed{0{,}47}$

(b) $\left(\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) \Rightarrow\right) \quad \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\overset{0{,}8}{\boxed{\mathbb{P}(B|A)}} \cdot \overset{0{,}4}{\boxed{\mathbb{P}(A)}}}{\boxed{\mathbb{P}(B)}\ 0{,}47} = 0{,}68$

Aufgabe: Von 100 Menschen leiden im Mittel 9 Personen an der Stoffwechselkrankheit Diabetes Typ 2. Jede vierte Person ist Raucher. In einer Studie wurde nun festgestellt, dass im Mittel 18 von 125 Rauchern an Typ-2-Diabetes leiden.

(a) Verwenden Sie den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, an Typ-2-Diabetes zu erkranken, für Raucher $\boxed{\text{doppelt}}$ so groß ist wie für Nichtraucher.

(b) Zeigen Sie, dass 40% der Typ-2-Diabetiker Raucher sind.

$A = \{\text{Person hat Diabetes}\}$

$B = \{\text{Person raucht}\}$

$\mathbb{P}(A) = 0{,}09$

$\mathbb{P}(B) = 0{,}25$

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{18}{125}$

(a) z.z.: $\mathbb{P}(A|B) = 2 \cdot \boxed{\mathbb{P}(A|\overline{B})}$ ← gesucht

$$\underbrace{\mathbb{P}(A)}_{0{,}09} = \underbrace{\mathbb{P}(A|B)}_{\frac{18}{125}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{0{,}25} + \underbrace{\mathbb{P}(A|\overline{B})}_{?} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B})}_{1-0{,}25}$$

$$0{,}09 = \frac{9}{250} + \mathbb{P}(A|\overline{B}) \cdot 0{,}75 \Rightarrow \mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{0{,}09 - \frac{9}{250}}{0{,}75} = \underline{\underline{\frac{9}{125}}}$$

(b) z.z.: $\mathbb{P}(B|A) = 0{,}4$

$(\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B))$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\boxed{\mathbb{P}(A|B)}_{\frac{18}{125}} \cdot \boxed{\mathbb{P}(B)}^{0{,}25}}{\boxed{\mathbb{P}(A)}_{0{,}09}} = \underline{\underline{0{,}4}}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

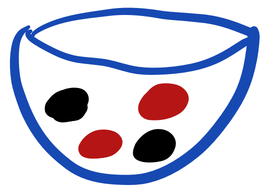
Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. A und B sind genau dann unabhängig, falls:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

Anmerkung: Ist die Gleichung nicht erfüllt, sind A und B abhängig.

$$\boxed{A, B \text{ unabh.} \Longleftrightarrow \bar{A}, B \text{ unabh.} \Longleftrightarrow A, \bar{B} \text{ unabh.} \Longleftrightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ unabh.}}$$

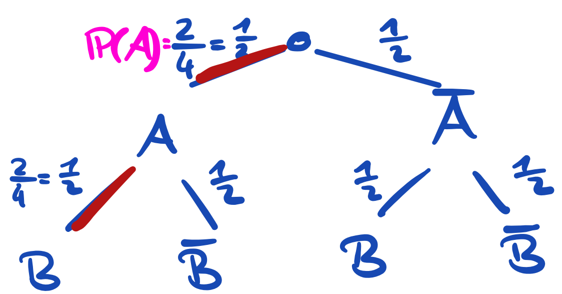
Aufgabe: Betrachtet wird das zweimalige Ziehen (mit/ohne Zurücklegen) aus einer Urne mit vier Kugeln, davon zwei schwarz und zwei rot. Sind die Ereignisse $A = \{\text{Die erste Kugel ist schwarz}\}$ und $B = \{\text{Die zweite Kugel ist rot}\}$ stochastisch unabhängig?



⊛ Totale Wkt.

⊛ bedingte Wkt.

mit Zurücklegen



$P(A) = \frac{1}{2}$

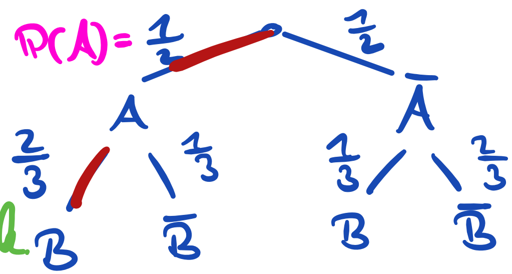
⊛ $P(B) = \underbrace{P(B|A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(B|\bar{A})}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(\bar{A})}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

⊛ $P(A \cap B) = \underbrace{P(B|A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow$ A, B unabh.

ohne Zurücklegen



$P(A) = \frac{1}{2}$

⊛ $P(B) = \underbrace{P(B|A)}_{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(B|\bar{A})}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(\bar{A})}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

⊛ $P(A \cap B) = \underbrace{P(B|A)}_{\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow$ A, B abhängig

Aufgabe: Drei Jäger mit den Trefferquoten 0.3, bzw. 0.4 bzw. 0.5 schießen gleichzeitig und unabhängig voneinander auf ein Wildschwein, welches von *genau einer* Kugel getroffen zu Boden geht. Wie ist die Beute „gerecht“ aufzuteilen, wenn bei der anschließenden Untersuchung nicht festzustellen ist, von welchem der Schützen das Schwein erlegt wurde?

$A = \{\text{Genau 1 Treffer}\}$

$B_i = \{\text{Jäger } i \text{ trifft}\}$

$\mathbb{P}(B_1) = 0{,}3$

$\mathbb{P}(B_2) = 0{,}4$

$\mathbb{P}(B_3) = 0{,}5$

ges.: $\mathbb{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(B_i \cap \overline{B}_j \cap \overline{B}_k)}{\mathbb{P}(B_i \cap \overline{B}_j \cap \overline{B}_k) + \mathbb{P}(\overline{B}_i \cap B_j \cap \overline{B}_k) + \mathbb{P}(\overline{B}_i \cap \overline{B}_j \cap B_k)}, \quad i \neq j \neq k \neq i$$

$$\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}_j) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}_k)}{\mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}_j) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}_k) + \mathbb{P}(\overline{B}_i) \cdot \mathbb{P}(B_j) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}_k) + \mathbb{P}(\overline{B}_i) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}_j) \cdot \mathbb{P}(B_k)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{\frac{9}{44}}} \quad (\approx 20\%)$$

$$P(B_2|A) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{\frac{7}{22}}} \quad (\approx 32\%)$$

$$P(B_3|A) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5} = \underline{\underline{\frac{21}{44}}} \quad (\approx 48\%)$$