# Diskrete Verteilungen & Verteilungsmodelle

# (Reelle) Zufallsvariablen

**Def.:** Eine (reelle) Zufallsvariable ist eine Funktion $X: \Omega \to \mathbb{R}$, welche die Messbarkeitsbedingung erfüllt:
$\forall x \in \mathbb{R}$: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ lässt sich eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.

# Verteilungsfunktion

**Def.:** Jede (reelle) Zufallsvariable $X$ erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß, ausgedrückt durch die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$\boxed{F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

und hat folgende (definierende) Eigenschaften:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

(2) $F_X$ ist monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(3) $F_X$ ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

# Diskrete Verteilungen

- diskrete Zufallsvariable $:\Longleftrightarrow$ Menge der Ausprägungen zählbar
- Verteilungsfunktion

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_i := \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0$$

- Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{i \in J} x_i \cdot p_i$$

Ereignis

Wahrscheinlichkeit

- Varianz

$$Var(X) := \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) \left( = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \right)$$

**Aufgabe:** Die Verteilung einer diskreten Zufallsgröße $X$ sei durch die folgende Tabelle gegeben:

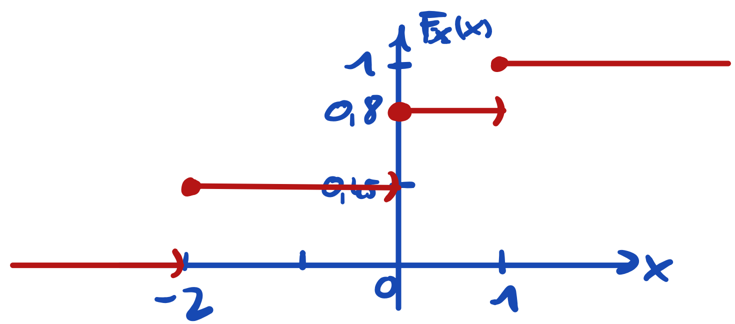
| $k$ | $x_1 = -2$ | $x_2 = 0$ | $x_3 = 1$ |
|---|---|---|---|
| $P_i = \mathbb{P}(X = k)$ | 0,45 | 0,35 | $a = 0{,}2$ |
| $F_X(k)$ | 0,45 | 0,8 | 1 |

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X$ und skizzieren Sie diese.

(b) Wie lauten der Erwartungswert und die Varianz von $X$?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X$ einen Wert annimmt, der nicht negativ ist? $X \geq 0$ Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn bekannt ist, dass $X$ nicht positiv ist? $X \leq 0$

(a)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0{,}45 & -2 \leq X < 0 \\ 0{,}8 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$




(b)
$$E(X) = \sum_{i \in J} x_i \cdot P_i = -2 \cdot 0{,}45 + \cancel{0 \cdot 0{,}35} + 1 \cdot 0{,}2 = \underline{\underline{-0{,}7}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - (-0{,}7)^2 = \underline{\underline{1{,}51}}$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in J} x_i^2 \cdot P_i = (-2)^2 \cdot 0{,}45 + \cancel{0^2 \cdot 0{,}35} + 1^2 \cdot 0{,}2 = 2$$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

„Bedingte Wahrsch."

(c) $P(X\geq 0) = \underbrace{P(X=0)}_{0{,}35} + \underbrace{P(X=1)}_{0{,}2} = \underline{\underline{0{,}55}}$

Gemeinsamkeit

$$P(\underbrace{X\geq 0}_{A} \mid \underbrace{X\leq 0}_{B}) = \frac{P(X\geq 0 \cap X\leq 0)}{P(X\leq 0)}$$

$$= \frac{P(X=0)}{P(X\leq 0)} = \frac{0{,}35}{0{,}45+0{,}35} = \underline{\underline{0{,}4375}} \left(=\frac{7}{16}\right)$$

# (Diskrete) Gleichverteilung

**Def.:** Jedes der (endlich vielen) Ereignisse $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ist gleich wahrscheinlich.

(1) $X \sim \mathrm{Unif}\{x_1, \dots, x_n\}$

(2) $p_i := \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$

(3) $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{i}{n}$

(4) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in J} x_i \cdot p_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in J} x_i$

(5) $\mathrm{Var}(X) = \dots$

**Bsp:** $X \sim \mathrm{Unif}\{1, \dots, n\}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ ⊛

$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

⊛
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

# Binomialverteilung

Wdh. $p$ bleibt gleich

**Def.:** $X = \{$Anzahl Erfolge bei $n$ Versuchen (mit Wdh.)$\}$

(1) $X \sim B(n,p)$

(2) $p_k := \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(3) $F_X(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

(4) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \ldots = n \cdot p$

(5) $Var(X) = \ldots = np(1-p)$

**Anmerkung:** $X_n \sim B(n, p_n)$, $n \cdot p_n = \lambda$ „konstant"
$Y \sim Poi(\lambda)$

$$\left.\begin{matrix} X_n \sim B(n,p_n),\ n\cdot p_n = \lambda \\ Y \sim Poi(\lambda) \end{matrix}\right\} \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$$

„Poissonscher Grenzwertsatz"

(siehe VL zu „Approximationen von Verteilungen")

# Erwartungswert & Varianz

$$k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} \boxed{k \cdot \binom{n}{k}} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k}}_{=(p+(1-p))^{n-1} = 1} = \underline{\underline{n \cdot p}}$$

Binomischer Lehrsatz

$$k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}$$

$$E(X \cdot (X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot p_k = \sum_{k=2}^{n} \boxed{k(k-1)\binom{n}{k}} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \cdot p^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \cdot p^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-2-k}}_{=(p+(1-p))^{n-2} = 1} = n(n-1) \cdot p^2$$

Binomischer Lehrsatz

$$\mathbb{E}(X\cdot(X-1)) = \mathbb{E}(X^2 - X) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

(*) Rechenregel für EW

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X\cdot(X-1)) + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 + np(1-p)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \cancel{n^2p^2} + np(1-p) - \cancel{n^2p^2} = \underline{\underline{np(1-p)}}$$

# Hypergeometrische Verteilung

Wkk. p ändert sich

**Def.:** $X = \{$Anzahl Erfolge bei $n$ Versuchen (ohne Wdh.)$\}$

Gesamtzahl

Anzahl Objekte mit Merkmal

(1) $X \sim Hyp(N, M, n)$

(2) $p_k := \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

(3) $F_X(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \dfrac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

(4) $\mathbb{E}(X) = \ldots = n \cdot \dfrac{M}{N}$

(5) $Var(X) = \ldots = n \cdot \dfrac{M}{N}\left(1 - \dfrac{M}{N}\right) \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$

**Bsp:** 2 Asse beim Skatspiel

$N = 32$ Karten (gesamt)

$M = 4$ Asse (gesamt)

$n = 10$ Handkarten

$k = 2$ Asse auf der Hand

# Erwartungswert & Varianz

$M\cdot\binom{M-1}{k-1}$ $\qquad$ $N-1-(M-1)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = M\cdot\frac{1}{\binom{N}{n}}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{M-1}{k}\binom{\boxed{N-M}}{n-1-k}}_{=\binom{N-1}{n-1}}$$

$$= M\cdot\frac{n\cancel{!}\,\cancel{(N-n)!}}{N\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{(N-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot\cancel{(N-n)!}} = \underline{\underline{n\cdot\frac{M}{N}}}$$

$M\cdot(M-1)\cdot\binom{M-2}{k-2}$

$$\mathbb{E}(X\cdot(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\cdot p_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$N-2-(M-2)$

$$= M(M-1)\cdot\frac{1}{\binom{N}{n}}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}\binom{M-2}{k}\cdot\binom{\boxed{N-M}}{n-2-k}}_{=\binom{N-2}{n-2}} = M(M-1)\cdot\frac{n!\,\cancel{(N-n)!}}{N!}\cdot\frac{(N-2)!}{(n-2)!\,\cancel{(N-n)!}}$$

$$= M(M-1)\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{N\cdot(N-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X\cdot(X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = M(M-1)\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{N\cdot(N-1)} + n\cdot\frac{M}{N}$$

$$= n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + \frac{N-1}{N-1}\right) = n\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{(M-1)(n-1)+(N-1)}{N-1}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 = n\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{(M-1)(n-1)+(N-1)}{N-1} - n^2\cdot\frac{M^2}{N^2}$$

$$= n\,\frac{M}{N^2}\cdot\frac{nMN - MN - nN \cancel{+N} + N^2 \cancel{-N}}{N-1} - \frac{n^2M^2N - n^2M^2}{N^2(N-1)}$$

$$= n\cdot\frac{M}{N^2(N-1)}\left(\cancel{nMN} - MN - nN + N^2 - \cancel{nMN} + nM\right)$$

$$= n\cdot\frac{M}{N^2(N-1)}\cdot(N-M)\cdot(N-n) = \underline{\underline{n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}}}$$

# Poissonverteilung (Verteilung der seltenen Ereignisse)

**Def.:** $X = \{$Anzahl Erfolge (innerhalb einer Zeit)$\}$

(1) $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Intensität)

(2) $p_k := \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

x abgerundet

(3) $F_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k}{k!}$

(4) $\mathbb{E}(X) = \lambda$

(5) $\mathbb{V}ar(X) = \lambda$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

„Potenzreihe der e-Funktion"

## Erwartungswert & Varianz

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \underline{\underline{\lambda}}$$

$$\mathbb{E}(X \cdot (X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X \cdot (X-1)\big) + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda}}$$

# Geometrische Verteilung

Wahrsch. $p$ bleibt gleich

**Def.:** $X = \{$Anzahl Versuche bis (einschließlich) zum 1. Erfolg$\}$

(1) $X \sim G(p)$

(2) $p_k := \mathbb{P}(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1}$

(3) $F_X(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor} p\cdot(1-p)^{k-1} = p\cdot\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1}(1-p)^k = \cancel{p}\cdot\frac{1-(1-p)^{\lfloor x\rfloor}}{\boxed{1-(1-p)}} = \underline{1-(1-p)^{\lfloor x\rfloor}}$

$\mathbb{P}(X\overset{\shortparallel}{\le} x)$ $\qquad \overset{\shortparallel}{\cancel{p}}$

(4) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

(5) $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

**Anmerkung:** Gedächtnislosigkeit

$\mathbb{P}(X \le N+k \mid X>N) = \mathbb{P}(X\le k)$

$\mathbb{P}(X \ge N+k \mid X>N) = \mathbb{P}(X\ge k)$

# Erwartungswert & Varianz

$$-\frac{d}{dp}(1-p)^k$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{k \cdot (1-p)^{k-1}}$$

$$= -p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^k = -p \cdot \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = -p \cdot \frac{d}{dp} \frac{1}{1-(1-p)} = -p \cdot \frac{d}{dp} \cdot \frac{1}{p} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

$$\mathbb{E}(X \cdot (X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$= p(1-p) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{k \cdot (k-1) \cdot (1-p)^{k-2}} = p(1-p) \cdot \frac{d^2}{dp^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$$

$$\frac{d^2}{dp^2}(1-p)^k$$

$$= p(1-p) \cdot \frac{d^2}{dp^2} \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p) \cdot \frac{d^2}{dp^2} \cdot \frac{1}{p} = p(1-p) \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X \cdot (X-1)) + \mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \underline{\underline{\frac{1-p}{p^2}}}$$

**Aufgabe:** Um zu entscheiden, ob eine Warenlieferung angenommen werden soll, wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ entnommen. Enthält die Stichprobe kein fehlerhaftes Teil, so wird die Lieferung angenommen, enthält sie mehr als ein Ausschussstück, wird die Lieferung zurückgewiesen. Bei genau einem Ausschussteil wird eine weitere Stichprobe entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung nach der ersten Stichprobe, wenn ihr Aussschussanteil 1% beträgt?

$$X = \{\text{Anzahl fehlerhafte Teile bei } n=5 \text{ Teilen}\}$$

$$X \sim B(n=5,\ p=0{,}01)$$

$$P(X=0) = \cancel{\binom{5}{0}} \cdot \cancel{0{,}01^0} \cdot 0{,}99^5 = \underline{\underline{0{,}9509}}$$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

**Aufgabe:** Ein Bäcker hat 100 frische Brote und 20 altbackene, die er „auf gut Glück“ darunter mischt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde, der drei Brote kauft, wenigstens ein altbackenes erhält. Wieviele altbackene Brötchen kauft er im Mittel?

$X = \{\text{Anzahl alte Brote bei } n=3 \text{ Broten}\}$

$X \sim Hyp(N=120, M=20, n=3)$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X \geq 1}_{\text{wenigstens 1 altes Brot}}) = 1 - \mathbb{P}(X = \underbrace{0}_{\text{kein altes Brot}}) = 1 - \frac{\cancel{\binom{20}{0}} \cdot \binom{100}{3}}{\binom{120}{3}} = \frac{851}{2006} \approx \underline{\underline{0{,}4242}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 3 \cdot \frac{20}{120} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ (Brote)}$$

**Aufgabe:** Es wird mit einem idealen 6-seitigen Würfel gewürfelt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine Primzahl zu würfeln?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach 3 Würfen noch immer keine Primzahl gewürfelt zu haben?

$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq$

(c) Wie oft muss der Würfel geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % eine 6 zu würfeln? Anzahl Versuche für mindestens k Erfolge $\Rightarrow$ Binomialverteilung

(a) $X = \{\text{Ergebnisse beim Würfelwurf}\} = \{1, 2, \ldots, 6\}$

$X \sim \text{Unif}\{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathbb{P}(X = \text{Primzahl}) = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(b) $X = \{\text{Anzahl Primzahl bei } n=3 \text{ Würfen}\}$

$X \sim B\left(n=3, p=\frac{1}{2}\right)$

$\mathbb{P}(X=0) = \cancel{\binom{3}{0}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

(c) $X = \{\text{Anzahl „6" bei } n \text{ Würfen}\}$

$X \sim B(n, p = \frac{1}{6})$

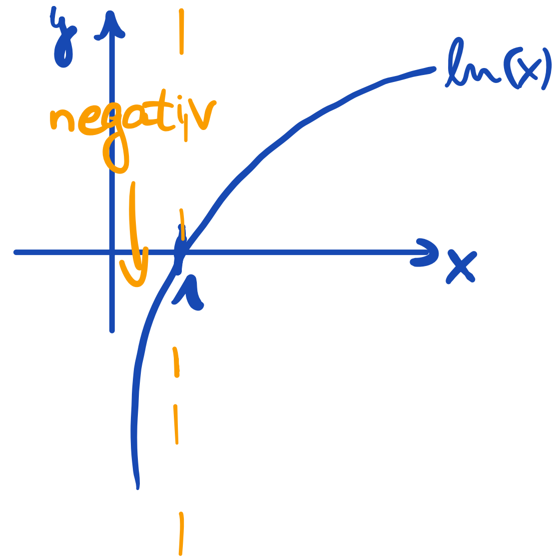
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \cancel{\binom{n}{0}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{6}\right)^0} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99 \quad \Big| + \left(\frac{5}{6}\right)^n \Big| - 0{,}99$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01 \quad | \ln(\ldots)$

$\ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \leq \ln(0{,}01) \quad | : \ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 25{,}29$

$\Rightarrow \boxed{n \geq 26}$



**Aufgabe:** Beim Kartenspiel Poker in der Variante Texas Hold'em werden pro Spielrunde jedem Spieler zwei Handkarten ausgeteilt von einem Kartendeck mit 52 verschiedenen Spielkarten bestehend aus 13 Kartenwerten (2, ..., 10, J, Q, K, A), jeweils in 4 Farben (♣, ♥, ♠, ♦). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 15 Runden gespielt werden, bis der erfahrenste Spieler am Tisch zwei Asse in seiner Hand hält?

Geom. Vert.

$X = \{$ Anzahl Runden bis 2 Asse auf der Hand $\}$

$X \sim G\left(p = \frac{1}{221}\right)$

$$p = \boxed{\frac{4}{52}} \cdot \boxed{\frac{3}{51}} \left( = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} \right) = \frac{1}{221}$$

4 mögliche Asse von 52 Karten

3 verbleibende Asse von 51 verbleibenden Kart.

$$P(X \leq 15) = F_X(15) = 1 - \left(1 - \frac{1}{221}\right)^{15} \approx \underline{\underline{0{,}0658}}$$

**Aufgabe:** Ein Arbeiter bedient 16 Maschinen zugleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Maschinen in einem bestimmten Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordert, sei 0,25. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 Maschinen in diesem Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordern?

$X = \{$ Anzahl M.d.s.A.e. bei $n=16$ Maschinen

$X \sim B(n=16, p=0{,}25)$

$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

$= 1 - \left(\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)\right)$

$= 1 - \left(\binom{3}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^3 + \binom{3}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^2 + \binom{3}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^1 + \binom{3}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^0\right)$

$= \underline{\underline{0{,}5950}}$ $= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{16}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{16-k}$ mit TR

"$E(X) = \lambda$"

**Aufgabe:** Bei einer nächtlichen Autobahnkontrolle registriert die Polizei im Mittel pro Stunde 5 Autofahrer mit überhöhter Geschwindigkeit. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Stunde lang kein Raser vorbeifährt?

$X = \{\text{Anzahl Raser (innerhalb } \underline{1h})\}$

$X \sim Poi(\lambda = 5)$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = e^{-5} = \underline{\underline{0{,}0067}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}}$$