Stetige Verteilungen & Verteilungsmodelle

(Reelle) Zufallsvariablen

<u>Def.:</u> Eine (reelle) Zufallsvariable ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, welche die Messbarkeitsbedingung erfüllt:

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ lässt sich eine <u>Wahrscheinlichkeit</u> zuordnen.

Verteilungsfunktion

<u>Def.:</u> Jede (reelle) Zufallsvariable X erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß, ausgedrückt durch die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$\boxed{F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

und hat folgende (definierende) Eigenschaften:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ <u>und</u> $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

(2) F_X ist monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(3) F_X ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

$\mathbb{P}(X = x) = 0$

Stetige Verteilungen

- Stetige Zufallsvariable $:\Longleftrightarrow$ Menge der Ausprägungen überabzählbar

- Verteilungsfunktion

Dichtefkt.

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

!

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq b) &= F_X(b) \\ \mathbb{P}(X \geq a) &= 1 - F_X(a) \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}}$$

!

- Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \geq 0 \,, \qquad \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$$

$$f_X(x) \underset{\text{Diff.}}{\overset{\text{Int.}}{\rightleftarrows}} F_X(x)$$

- Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx$$

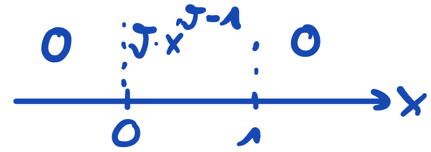
- Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2$$

$x^2 \cdot f_X(x)$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass es sich bei der Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\theta > 0)$$



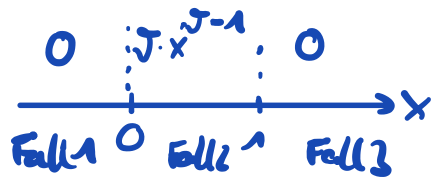
(a) tatsächlich um eine Dichtefunktion der Zufallsgröße X handelt und (b) bestimmen Sie die Verteilungsfunktion. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (c) $\mathbb{P}(X < 1/2)$? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn bekannt ist, dass X nur Werte größer als 0.25 annehmen kann?

(a) $f_X(x) \geq 0$ ✓ und $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$?

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{1} \vartheta \cdot x^{\vartheta-1}\,dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} 0\,dx}$$

$$= \cancel{\vartheta} \cdot \cancel{\tfrac{1}{\vartheta}} \left[x^{\vartheta}\right]_0^1 = 1^{\vartheta} - 0^{\vartheta} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

(b) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \dots$



Fall 1: $x < 0$: $\dots = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = \underline{\underline{0}}$

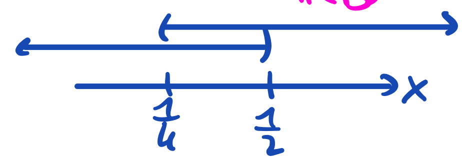
Fall 2: $0 \le x < 1$: $\dots = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{x} \vartheta \cdot x^{\vartheta-1}\,dx = \dots \overset{\text{siehe (a)}}{=} \left[x^{\vartheta}\right]_{0}^{x}$

$$= x^{\vartheta} - 0^{\vartheta} = \underline{\underline{x^{\vartheta}}}$$

Fall 3: $x \ge 1$: $\dots = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \underbrace{\int_{0}^{1} \vartheta \cdot x^{\vartheta-1}\,dx}_{=1 \text{ (siehe (a))}} + \cancel{\int_{1}^{x} 0\,dx} = \underline{\underline{1}}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^{\vartheta} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$



(c) $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{\vartheta}}}$, $\mathbb{P}(\underbrace{X < \tfrac{1}{2}}_{A} \mid \underbrace{X > \boxed{0{,}25}}_{B})$ ($= \frac{1}{4}$) $= \frac{\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2})}{\mathbb{P}(X > \frac{1}{4})}$

$$= \frac{F_X(\frac{1}{2}) - F_X(\frac{1}{4})}{1 - F_X(\frac{1}{4})} = \frac{(\frac{1}{2})^{\vartheta} - (\frac{1}{4})^{\vartheta}}{1 - (\frac{1}{4})^{\vartheta}} \cdot \frac{4^{\vartheta}}{4^{\vartheta}} \left(= \frac{2^{\vartheta} - 1}{4^{\vartheta} - 1}\right)$$

(Stetige) Gleichverteilung

Def.: Alle Teilintervalle von $[a,b]$ gleicher Länge sind gleich wahrscheinlich.

$X \sim Unif[a,b]$

Dichte

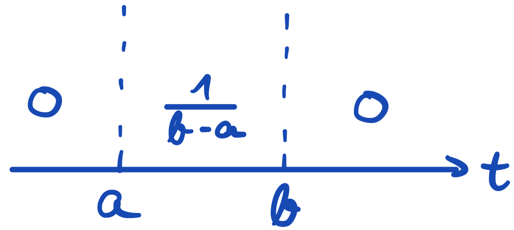
$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfkt.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \ldots = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \ldots = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Verteilungsfunktion



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \ldots$$

Fall 1: $x < a$: $\ldots = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Fall 2: $a \le x \le b$: $\ldots = \cancel{\int_{-\infty}^{a} 0\,dt} + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\left[t\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$

Fall 3: $x > b$: $\ldots = \cancel{\int_{-\infty}^{a} 0\,dt} + \underbrace{\int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt}_{=1} + \cancel{\int_{b}^{x} 0\,dt} = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Erwartungswert & Varianz

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt = \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}\left[t^2\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(b^2-a^2)}_{=(\cancel{b-a})\cdot(b+a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\,dt = \int_a^b t^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}\left[t^3\right]_a^b$$

$$= \cancel{\frac{1}{b-a}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(b^3-a^3)}_{=(b^2+ab+a^2)\cdot(\cancel{b-a})} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

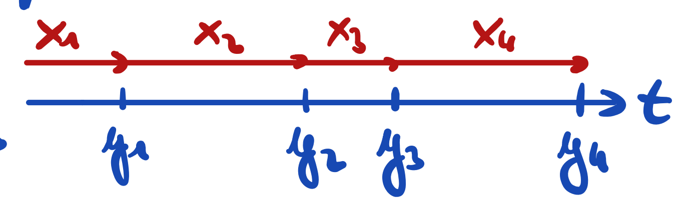
Exponentialverteilung

Def.: $X = \{\text{Dauer von Zeitintervallen}\}$ z.B. Wartezeit, Lebensdauer,...

$X \sim Exp(\lambda)$

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \ldots = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$Y \sim Poi(\lambda) \Longleftrightarrow X \sim Exp(\lambda)$

$Y = \{\text{Anzahl Erfolge (innerhalb einer Zeit)}\}$

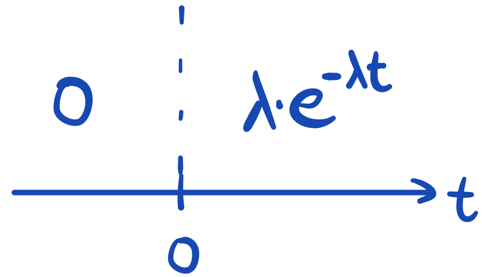
$E(X) = \ldots = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \ldots = \frac{1}{\lambda^2}$

Gedächtnislosigkeit

$$\mathbb{P}(X \leq x + t \mid X > t) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$\mathbb{P}(X \geq x + t \mid X > t) = \mathbb{P}(X \geq x)$$

Verteilungsfunktion



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \dots$$

Fall 1: $x < 0$: $\dots = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Fall 2: $x \geq 0$: $\dots = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_{0}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt = -\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Erwartungswert & Varianz

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt = \lim_{p\to\infty} \int_0^p t\cdot \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lim_{p\to\infty} \lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\Big[t e^{-\lambda t}\Big]_0^p - \frac{1}{\lambda^2}\Big[e^{-\lambda t}\Big]_0^p\right)$$

	D	I
$+$	t	$e^{-\lambda t}$
$-$	1	$-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$
$+\int$	0	$\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$

$$= \lim_{p\to\infty} \underbrace{p\cdot e^{-\lambda p}}_{\to 0} - \frac{1}{\lambda}\cdot(\underbrace{e^{-\lambda p}}_{\to 0} - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\,dt = \lim_{p\to\infty} \int_0^p t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= \lim_{p\to\infty} \lambda\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\Big[t^2 e^{-\lambda t}\Big]_0^p - \frac{2}{\lambda^2}\Big[t e^{-\lambda t}\Big]_0^p - \frac{2}{\lambda^3}\Big[e^{-\lambda t}\Big]_0^p\right)$$

	D	I
$+$	t^2	$e^{-\lambda t}$
$-$	$2t$	$-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$
$+$	2	$\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$
$-\int$	0	$-\frac{1}{\lambda^3} e^{-\lambda t}$

$$= \lim_{p\to\infty} -\underbrace{p^2 e^{-\lambda p}}_{\to 0} - \frac{2}{\lambda}\cdot \underbrace{p\cdot e^{-\lambda p}}_{\to 0} - \frac{2}{\lambda^2}\cdot(\underbrace{e^{-\lambda p}}_{\to 0} - 1) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$\mathbb{E}(X) = 10 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 10\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{10}$

Aufgabe: Die Bedienung eines Kunden dauert im Mittel 10 Minuten und kann durch eine exponentialverteilte Zufallsgröße modelliert werden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Bedienung eines Kunden innerhalb einer Viertelstunde beendet?

(b) Welche durchschnittliche Bedienzeit ($\mathbb{E}(X)$) müsste vorliegen, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde länger als eine Viertelstunde bedient wird, gleich 0.1 sein soll?

$X = \{\text{Wartezeit (innerhalb 1 min)}\}$

$X \sim Exp(\lambda = \frac{1}{10})$

$\mathbb{P}(X \leq b) = F_X(b)$

$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a)$

$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

(a) $\mathbb{P}(X \leq 15) = F_X(15) = 1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 15} \approx \underline{\underline{0{,}7769}}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $\mathbb{P}(X > 15) = 1 - F_X(15) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 15}) = \boxed{e^{-\lambda \cdot 15} = 0{,}1} \quad | \ln(\ldots)$

$-15 \cdot \lambda = \ln(0{,}1) \quad | : (-15)$

$\lambda = -\frac{\ln(0{,}1)}{15} = -\frac{\ln(\frac{1}{10})}{15} = \frac{\ln((\frac{1}{10})^{-1})}{15} = \frac{\ln(10)}{15}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \underline{\underline{\frac{15}{\ln(10)}}}$

Aufgabe: Bei Fußballspielen kann die Zeit bis zum ersten Tor als exponentialverteilte Zufallsgröße angenommen werden. Für Spiele der Bundesliga beziffern Experten den Parameter dieser Verteilung auf $\lambda = 0{,}04$ pro Minute.

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

(a) Wieviel Zeit vergeht im Mittel bis zum ersten Tor?

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Bundesligaspiel

(b) das erste Tor vor der 15. Spielminute fällt.

(c) in der ersten viertel Stunde bereits mindestens 2 Tore fallen.

$X = \{\text{Wartezeit (in min)}\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 0{,}04)$

$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}(X \leq b) = F_X(b) \\ &\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a) \\ &\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}}$

(a) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}04} = 25$

(b) $\mathbb{P}(X < 15) = F_X(15) = 1 - e^{-0{,}04 \cdot 15} \approx \underline{\underline{0{,}4512}}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

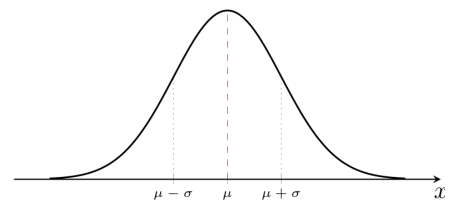
(c) $Y = \{\text{Anzahl Tore (in 15 min)}\}$

$Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda = 15 \cdot 0{,}04 = 0{,}6)$ $\quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y < 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1 - \big(\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1)\big)$$

$$= 1 - \left(\frac{0{,}6^0}{0!} e^{-0{,}6} + \frac{0{,}6^1}{1!} e^{-0{,}6}\right) = 1 - 1{,}6 \cdot e^{-0{,}6} \approx \underline{\underline{0{,}1219}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Normalverteilung

Def.: $X = \{\text{Messfehler} / \text{Abweichungen} / \ldots\}$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

schau in die z-Tabelle

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(X \underset{(>)}{\geq} a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Standardisieren: $z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

Beweis: Rechenregeln für $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$

Aufgabe: Sei X normalverteilt mit $\mathbb{E}(X) = 1{,}5$ und $\mathrm{Var}(X) = 7{,}29$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X < 4{,}8)$, $\mathbb{P}(X > 3{,}3)$ und $\mathbb{P}(2{,}2 \leq X < 7{,}2)$.

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 1{,}5;\ \sigma^2 = 7{,}29)$$

$$\mathbb{P}(X < 4{,}8) = \Phi\left(\frac{4{,}8-1{,}5}{\sqrt{7{,}29}}\right) = \underbrace{\Phi(1{,}22)}_{0{,}888767} \approx \underline{\underline{0{,}8888}}$$

$$\mathbb{P}(X > 3{,}3) = 1 - \Phi\left(\frac{3{,}3-1{,}5}{\sqrt{7{,}29}}\right) = 1 - \underbrace{\Phi(0{,}67)}_{0{,}748571} = \underline{\underline{0{,}2514}}$$

$$\mathbb{P}(2{,}2 \leq X < 7{,}2) = \Phi\left(\frac{7{,}2-1{,}5}{\sqrt{7{,}29}}\right) - \Phi\left(\frac{2{,}2-1{,}5}{\sqrt{7{,}29}}\right)$$

$$= \underbrace{\Phi(2{,}11)}_{0{,}982571} - \underbrace{\Phi(0{,}26)}_{0{,}602568} \approx \underline{\underline{0{,}38}}$$

Zusatz:

$$\mathbb{P}(X \leq 1{,}4) = \Phi\left(\frac{1{,}4-1{,}5}{\sqrt{7{,}29}}\right) = \Phi(-0{,}04) = 1 - \underbrace{\Phi(0{,}04)}_{0{,}515953} = \underline{\underline{0{,}484}}$$

Aufgabe: Gemäß der Verordnung (EG) Nr. 589/2008 der Kommission vom 23. Juni 2008 gilt für die Klassifizierung und Ettiketierung von Hühnereiern in der Europäischen Union die folgende Einteilung nach Gewichtsklassen

Bezeichnung	S	M	L	XL
Gewicht (in g)	unter 53	53 bis unter 63	63 bis unter 73	73 und mehr

Auf einem Hühnerhof kann das Gewicht der Eier durch eine Normalverteilung mit Erwartungswert 61 g und Standardabweichung 9 g beschrieben werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei zur Gewichtsklasse L gehört. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn alle Eier der Klasse S bereits vorher aussortiert worden sind?

$X = \{ \text{Gewicht in g} \}$

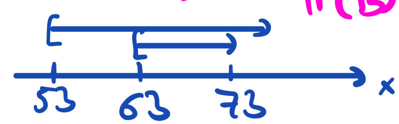
$X \sim \mathcal{N}(\mu = 61; \sigma^2 = 9^2)$

$$P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$P(X \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(63 \leq X < 73) = \Phi\left(\frac{73-61}{9}\right) - \Phi\left(\frac{63-61}{9}\right)$$

$$= \underbrace{\Phi(1{,}33)}_{0{,}908241} - \underbrace{\Phi(0{,}22)}_{0{,}587064} = \underline{0{,}3212}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$P(\underbrace{63 \leq X < 73}_{A} \mid \underbrace{X \geq 53}_{B}) = \frac{P(63 \leq X < 73)}{P(X \geq 53)} = \frac{0{,}3212}{1 - \Phi\left(\frac{53-61}{9}\right)}$$

$$= \frac{0{,}3212}{1 - \Phi(-0{,}89)} = \frac{0{,}3212}{\Phi(0{,}89)} = \underline{0{,}395}$$

0,813267

Aufgabe: Eine Maschine produziert Eisenstangen mit einer Länge X, die einer Normalverteilung mit $\mu := \mathbb{E}(X) = 3200\,\text{mm}$ und $\sigma^2 := \text{Var}(X) = 36\,\text{mm}^2$ unterliegt. Der Tolleranzbereich für brauchbare Eisenstangen sei $\mu \pm 10\,\text{mm}$.

(a) Wie groß ist der Ausschussanteil?

(b) Bis auf welchen Wert (bei gleichbleibendem μ) muss die Standardabweichung gesenkt werden, um einen Ausschussanteil von weniger als 6% zu garantieren?

(a) $X = \{\text{Länge in mm}\}$

$X \sim \mathcal{N}(\mu = 3200; \sigma^2 = 36)$

$$\mathbb{P}(X < \overset{\text{„}\mu-10\text{"}}{3190} \text{ oder } X > 3210) = 1 - \mathbb{P}(3190 \leq X \leq \overset{\text{„}\mu+10\text{"}}{3210})$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{3210-3200}{6}\right) - \Phi\left(\frac{3190-3200}{6}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\Phi(1{,}67) - \underbrace{\Phi(-1{,}67)}_{(1-\Phi(1{,}67))}\right) = 1 - \left(2 \cdot \Phi(1{,}67) - 1\right)$$

$$= 2 - 2 \cdot \Phi(1{,}67) = 2 \cdot (1 - \underbrace{\Phi(1{,}67)}_{0{,}952540}) = 2 \cdot 0{,}04746 = \underline{\underline{0{,}09492}}$$

(b) $P(\text{„Ausschuss"}) = 1 - P(\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10)$

$= 1 - \left(2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu+10-\mu}{\sigma}\right) - 1\right) = 1 - \left(2 \cdot \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1\right) = 2 - 2 \cdot \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)$

$= 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)\right) < 0{,}06 \quad | :2$

$1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) < 0{,}03 \quad | -1 \;|\cdot(-1)$

Wkh. → $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) > 0{,}97 \quad | \,\Phi^{-1}(\ldots)$ Wkh.

z-Wert

am Rand der Tabelle von der Wkh. 0,97

z-Werte → $\frac{10}{\sigma} > 1{,}88 \quad | \cdot\sigma \;| :1{,}88$

$\underline{\underline{\sigma < \frac{10}{1{,}88} \approx 5{,}3191}}$

Bsp.: $\Phi(z) = 0{,}05 \quad | \cdot(-1) \;| +1$

$1 - \Phi(z) = 1 - 0{,}05$

$\Phi(-z) = 0{,}95 \quad | \,\Phi^{-1}(\ldots)$

$-z = 1{,}6449 \quad | \cdot(-1)$

$\Rightarrow \underline{\underline{z = -1{,}6449}}$

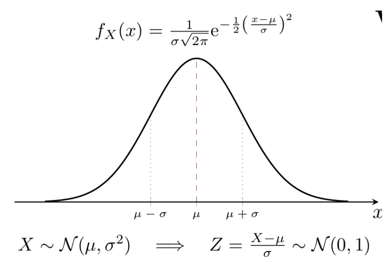
Aufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällige Realisierung einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in den folgenden Bereichen liegt?

(a) $\mu \pm \sigma$ (b) $\mu \pm 2\sigma$ (c) $\mu \pm 3\sigma$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

(a) $\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \ldots = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - 1$

$$= 2 \cdot \underbrace{\Phi(1)}_{0{,}841345} - 1 = \underline{\underline{0{,}68269}}$$



(b) $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \ldots = 2 \cdot \underbrace{\Phi(2)}_{0{,}977250} - 1 \approx \underline{\underline{0{,}9545}}$

(c) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = \ldots = 2 \cdot \underbrace{\Phi(3)}_{0{,}998650} - 1 \approx \underline{\underline{0{,}9973}}$