# Testtheorie

# Hypothesen

**Def.:** Eine statistische Hypothese ist eine Annahme über Kenngrößen oder Eigenschaften einer Verteilung.

Nullhypothese $H_0$ vs. Alternativhypothese $H_1$

| | | Realität | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ wahr | $H_1$ wahr |
| Entscheidung | $H_0$ behalten | ✓ | Fehler 2. Art |
| | $H_1$ wählen | Fehler 1. Art | ✓ |

- Fehler 1. Art kontrollieren: $\mathbb{P}(H_1 \mid H_0) \leq \alpha$
- Statistischen Test wählen, um $\mathbb{P}(H_0 \mid H_1)$ zu minimieren

**Aufgabe:** Stelle für die folgenden Beispiele die entsprechenden Hypothesen $H_0$ und $H_1$ auf.

(a) Eine Flaschenabfüllanlage soll überprüft werden. Beträgt die mittlere Abfüllmenge weniger als 700 ml?

(b) Laut Herstellerangabe soll die Standardabweichung für das Gewicht einer Haushaltswaage 1 g betragen. Es besteht der Verdacht, dass diese Angabe falsch ist, überprüfe deinen Verdacht.

(c) Ein Spieler behauptet, dass das Roulett in seinem Stammcasino manipuliert wurde und so das Ereignis „Null“ häufiger auftritt, als theoretisch zu erwarten ist.

(d) Verbraucht das neue Motormodell durchschnittlich signifikant weniger als das alte?

(e) Sie haben den Verdacht, der Ausschussanteil einer Ware eines bestimmten Lieferanten liegt überhalb des vereinbarten Wertes. Überprüfen Sie diese Vermutung.

# Statistische Tests

**Def.:** Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe, auf deren Grundlage eine Entscheidung getroffen werden soll. Dabei heißt die Entscheidungsfunktion $\varphi: \Omega \to \{0, 1\}$ mit

$$\varphi(\omega) := \begin{cases} 1 & H_0 \text{ ablehnen} \\ 0 & H_0 \text{ behalten} \end{cases}$$

(nichtrandomisierter) statistischer Test.

**Anmerkung:** $K_\varphi := \{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) = 1\}$ heißt kritischer Bereich oder auch Ablehnungsbereich von $H_0$.

# Testschema

(1) $\alpha$ festlegen

(2) Hypothesen wählen

(3) Testgröße berechnen

(4) Ablehnungsbereich für $H_0$ aufstellen

(5) Entscheidung

# Einfacher Test für $\mu$ (Gauß-Test)

**Voraussetzung:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma$ bekannt

| $H_0$ | $H_1$ | $H_0$ ablehnen, falls: |
|---|---|---|
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | $T \in \left(-\infty\ ,\ -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \infty\right)$ |
| $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $T \in (-\infty\ ,\ -z_{1-\alpha})$ |
| $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $T \in (z_{1-\alpha}\ ,\ \infty)$ |

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, \quad T \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ unter } H_0.$$

# Einfacher Test für $\mu$ (t-Test)

**Voraussetzung:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma$ unbekannt

| $H_0$ | $H_1$ | $H_0$ ablehnen, falls: |
|---|---|---|
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | $T \in \left(-\infty\ ,\ -t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \infty\right)$ |
| $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $T \in (-\infty\ ,\ -t_{n-1;\,1-\alpha})$ |
| $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $T \in (t_{n-1;\,1-\alpha}\ ,\ \infty)$ |

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}, \quad T \sim t_{n-1} \text{ unter } H_0.$$

# Einfacher Test für $\sigma$

**Voraussetzung:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

| $H_0$ | $H_1$ | $H_0$ ablehnen, falls: |
|---|---|---|
| $\sigma = \sigma_0$ | $\sigma \neq \sigma_0$ | $T \in \left[0\ ,\ \chi^2_{n-1;\,\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left[\chi^2_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \infty\right)$ |
| $\sigma \geq \sigma_0$ | $\sigma < \sigma_0$ | $T \in \left[0\ ,\ \chi^2_{n-1;\,\alpha}\right)$ |
| $\sigma \leq \sigma_0$ | $\sigma > \sigma_0$ | $T \in \left[\chi^2_{n-1;\,1-\alpha}\ ,\ \infty\right)$ |

$$T = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}, \quad T \sim \chi^2_{n-1} \text{ unter } H_0.$$

# Einfacher Test für p (Anteilswerte-Test)

**Voraussetzung:** $X \sim B(1, p_0)$, $np_0(1-p_0) > 9$ → ZGWS

| $H_0$ | $H_1$ | $H_0$ ablehnen, falls: |
|---|---|---|
| $p = p_0$ | $p \neq p_0$ | $T \in \left(-\infty\ ,\ -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \infty\right)$ |
| $p \geq p_0$ | $p < p_0$ | $T \in (-\infty\ ,\ -z_{1-\alpha})$ |
| $p \leq p_0$ | $p > p_0$ | $T \in (z_{1-\alpha}\ ,\ \infty)$ |

$$T = \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}, \quad T \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ unter } H_0.$$

**Aufgabe:** In einem Betrieb werden u.a. grüne Bohnen in Dosen abgefüllt. Nach einem Wechsel des Zulieferers ergab die letzte Qualitätskontrolle bei einer zufälligen Stichprobe von 25 Dosen ein mittleres Dosengewicht von 174,4 g bei einer Streuung von $s = 1,756\,\mathrm{g}$. Es wird angenommen, dass es sich bei den ermittelten Werten um Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße handelt. Untersucht werden soll zum Niveau $\alpha = 0,05$, ob das angegebene Abfüllgewicht von 175 g unterschritten wird.

(a) Formulieren Sie die Hypothesen für einen geeigneten statistischen Test.

(b) Geben Sie die verwendete Schätzfunktion verbal an und bestimmen Sie ihre Verteilung.

(c) Wie lautet die Testfunktion konkret und wie ist diese unter $H_0$ verteilt?

(d) Bestimmen Sie sowohl den Ablehnungsbereich- als auch den Annahmebereich für diesen Test und treffen Sie eine Entscheidung.

(e) Führen Sie den Test ebenfalls durch, falls die vom Hersteller angegebene Standardabweichung von 4 g stimmt.

**Aufgabe:** Gegeben sei ein Kartendeck mit 52 verschiedenen Spielkarten. Es gibt 13 Kartenwerte (2, …, 10, J, Q, K, A), jeweils in 4 Farben (♣, ♥, ♠, ♦) von denen 2 Karten an jeden Spieler ausgeteilt werden. Der listige Lars hält in 100 Spielen insgesamt 3 mal zwei „A“ auf der Hand. Überprüfen Sie mit einem statistischen Test, ob Lars betrügt. Um sich auch wirklich sicher zu sein und Lars nicht zu Unrecht vor den anderen Spielern zu beschuldigen, soll die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 1% betragen.

# Unabhängigkeitstest

Voraussetzung: $X, Y$ Zufallsgrößen

| $H_0$ | $H_1$ | $H_0$ ablehnen, falls: |
|---|---|---|
| $X, Y$ unabh. | $X, Y$ abh. | $T \in \left(\chi^2_{(k-1)(l-1);\,1-\alpha}\,,\ \infty\right)$ |

$$T = n \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet} n_{\bullet j}} \right) - 1 \right), \quad T \sim \chi^2_{(k-1)(l-1)} \text{ unter } H_0.$$

**Aufgabe:** Der Zusammenhang zwischen den Zeitpunkten des Laufen- und Sprechenlernens bei Kleinkindern soll untersucht werden. Beide Merkmale werden nach „zeitig“ und „spät“ unterschieden. Von 100 Kindern haben 22 zeitig laufen und sprechen gelernt, 29 zeitig laufen und spät sprechen sowie 19 spät laufen und sprechen. Prüfe anhand eines geeigneten Tests, ob es einen statistischen Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen gibt ($\alpha = 5\%$). Was sind in diesem Zusammenhang die Fehler erster und zweiter Art?

# Test auf Verteilung (Anpassungstest)

Voraussetzung: X Zufallsgröße

| $H_0$ | $H_1$ | $H_0$ **ablehnen, falls:** |
|---|---|---|
| $X \sim V$ | $X \nsim V$ | $T \in \left(\chi^2_{k-l-1;\,1-\alpha}\ ,\ \infty\right)$ |

$$T = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i}\right) - n \quad (np_i \geq 5), \quad T \sim \chi^2_{k-l-1} \text{ unter } H_0.$$

$V$ = zu prüfende Verteilung

$k$ = Anzahl der Klassen

$l$ = Anzahl unbekannter Parameter

**Aufgabe:** Gregor Mendel erhielt bei einem Kreuzungsversuch 315 runde gelbe, 108 runde grüne, 101 kantige gelbe und 32 kantige grüne Erbsen. Stehen diese Zahlen im Einklang mit den der Theorie nach zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten 9/16, 3/16, 3/16 bzw. 1/16? Prüfe die Vermutung zum Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.

**Aufgabe:** Die im Jahr 1881 vom Astronomen Simon Newcomb erstmals im *American Journal of Mathematics* veröffentlichte Gesetzmäßigkeit, welche heute unter dem Namen „Benford's Law" bekannt ist, beschreibt eine Verteilung der Ziffernstruktur von Zahlen in empirischen Datensätzen. Demnach ist die Auftretenswahrscheinlichkeit von Zahlen umso größer, je niedriger ihre Anfangsziffer ist. Genauer:

| Führende Ziffer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit (in %) | 30,1 | 17,6 | 12,5 | 9,7 | 7,9 | 6,7 | 5,8 | 5,1 | 4,6 |

Diese Gesetzmäßigkeit wird heute u.a. zur Bekämpfung von Wirtschaftskriminalität, Wahlbetrug oder der Aufdeckung von Fälschungen bei Interviews in der Marktforschung genutzt.

In der folgenden Tabelle sind die Häufigkeiten $n_i$ führender Anfangsziffern $x_i$ der Beschäftigungszahlen von insgesamt 694 verschiedener Beschäftigungsarten im Staat New York aus dem Jahr 2006 (Monat Mai) erfasst:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 233 | 102 | 96 | 62 | 54 | 38 | 43 | 30 | 36 |

Überprüfen Sie mit einem $\chi^2$-Anpassungstest zum Signifikanzniveau von 5 %, ob die Beschäftigungsstatistik einer Benford-Verteilung genügt.